Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați modulul numărului complex $(1+i)^2$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x-2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $2^{x+1}\le 4$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile cu trei elemente ale mulțimii $A=\{1,2,3,4,5\}$, elementele submulțimii alese să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$ și $\vec{v}=a\vec{i}-\vec{j}$. Determinați numărul real a pentru care $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$.

5p **6.** Calculați cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=4$, $AC=5$ și $BC=7$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}2x+y+3z=0\\ x+2y+3z=0\\ x+y+mz=0\end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei sistemului.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** În cazul $m=2$, determinați soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care $x_0>0$ și $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & -2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și mulțimea $G=\left\{X(p)=I_2+pA \,\middle|\, p\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\right\}$.

5p **a)** Arătați că $X(p)\cdot X(q)\in G$, pentru orice $X(p),\ X(q)\in G$.

5p **b)** Admitem că $(G,\cdot)$ este grup comutativ având elementul neutru $X(0)$. Determinați inversul elementului $X(p)$ în acest grup.

5p **c)** Rezolvați ecuația $(X(p))^3=I_2+7A$, unde $X(p)\in G$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-12x$.

5p **a)** Arătați că funcția este crescătoare pe intervalul $[2,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{f(x)}$.

5p **c)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care ecuația $f(x)=a$ are trei soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că orice primitivă a lui f este strict crescătoare pe $(-1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1\dfrac{f(x)}{x+1}dx$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_x^{2x}f(t)\,dt}{x}$.

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(1+i)^2 = 2i$ $\lvert 2i \rvert = 2$	**3p** **2p**
2.	$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$ $x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = -1$ $x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = 0$	**1p** **2p** **2p**
3.	$2^{x+1} \le 2^2$ $x+1 \le 2$ $S = (-\infty, 1]$	**1p** **2p** **2p**
4.	$p = \dfrac{\text{nr.cazuri favorabile}}{\text{nr.cazuri posibile}}$ Submulțimile cu 3 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice sunt: $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,4,5\}$ şi $\{1,3,5\} \Rightarrow$ 4 cazuri favorabile Numărul submulțimilor cu 3 elemente este $C_5^3 = 10 \Rightarrow$ 10 cazuri posibile $p = \dfrac{2}{5}$	**1p** **2p** **1p** **1p**
5.	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \Leftrightarrow a + 2 = 3$ $a = 1$	**4p** **1p**
6.	$\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$ $\cos A = -\dfrac{1}{5}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ $\det A = 3m - 6$	**2p** **3p**
b)	Sistemul are o soluție unică dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$ Finalizare: $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$	**2p** **3p**

c)	$\det A = 0$ și $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, deci matricea sistemului are rangul doi	1p
	$z = \alpha \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = -3\alpha \\ x + 2y = -3\alpha \end{cases} \Rightarrow x = -\alpha,\ y = -\alpha$	2p
	$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3 \Rightarrow (-\alpha)^2 + (-\alpha)^2 + \alpha^2 = 3 \Rightarrow \alpha \in \{-1, 1\}$	1p
	Soluția este $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, -1)$	1p
2.a)	$X(p) \cdot X(q) = X(p + q + pq)$	3p
	$p, q \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \Rightarrow (p+1)(q+1) \neq 0 \Rightarrow p + q + pq \neq -1$, deci $X(p + q + pq) \in G$	2p
b)	Pentru orice $X(p) \in G$, există $X\left(-\frac{p}{1+p}\right)$ astfel încât $X(p) \cdot X\left(-\frac{p}{1+p}\right) = X(0)$	3p
	$-\frac{p}{1+p} \neq -1 \Rightarrow X\left(-\frac{p}{1+p}\right) \in G$ și $X\left(-\frac{p}{1+p}\right)$ este inversul lui $X(p)$	2p
c)	$(X(p))^3 = X(7)$	1p
	$(X(p))^3 = X((p+1)^3 - 1)$	3p
	$(p+1)^3 = 8$, deci $p = 1$ și soluția este $X(1)$	1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 3x^2 - 12$	3p
	$f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [2, +\infty)$, deci f este crescătoare pe $[2, +\infty)$	2p
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	2p
	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{f(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{3x^2 - 12} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{6x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty$	3p
c)	Șirul lui Rolle pentru funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - a$ este $-\infty, 16 - a, -16 - a, +\infty$	3p
	Ecuația are trei soluții reale distincte dacă și numai dacă $a \in (-16, 16)$	2p
2.a)	$F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$	2p
	$f(x) > 0$ pentru orice $x \in (-1, +\infty)$	1p
	F este strict crescătoare	2p
b)	$\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} + \int_0^1 \frac{dx}{x+2} =$	3p
	$= \ln(x+1) \Big\|_0^1 + \ln(x+2) \Big\|_0^1 = \ln 3$	2p
c)	$\int_x^{2x} f(t)\,dt = \left(2t - \ln(t+2)\right) \Big\|_x^{2x} = 2x - \ln\frac{2x+2}{x+2}$, pentru $x > 0$	3p
	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x - \ln\frac{2x+2}{x+2}}{x} = 2$	2p