Olimpiada Naţională de Matematică 2007

Clasa a VI-a

CLASA A VI-A

1. Inițial, suma numerelor din A este cu 10 mai mică decât cea din B.

a) Există $10 \times 10 = 100$ de cazuri posibile. Exista 8 cazuri favorabile: $1 \leftrightarrow 6$, $3 \leftrightarrow 8, \ldots$, $15 \leftrightarrow 20$, deci $p_1 = 8/100$. **b)** Nu există nici un caz favorabil, deoarece prin înlocuirea a două bile, suma numerelor din A se modifică cu un număr par, deci nu poate creste cu 5.Astfel, $p_2 = 0$.

2. a) Vom folosi „teorema unghiului de 30°". Aceasta o putem face, de exemplu, luând $DE \perp AC$, $E \in AC$ şi observând că, în triunghiul dreptunghic CDE, cateta DE este jumătate din ipotenuza DC, deci $m(\sphericalangle DCE) = 30°$. **b)** Observăm că $m(\sphericalangle BCD) = 30°$. Fie $\{O\} = AB \cap CD$. Observăm succesiv că triunghiul OBC este isoscel, $BO = OC$, $OA = OM$, $m(\sphericalangle OAM) = 30° = m(\sphericalangle OBC)$, $AM \parallel BC$.

3. Suma cifrelor unui număr divizibil cu 9 este şi ea divizibilă cu 9. Astfel, dacă luăm un număr de trei cifre divizibil cu 9 atunci suma cifrelor sale poate fi 9, 18 sau 27 (27 doar în cazul lui 999). Dacă, în plus, numărul este divizibil si cu 2, atunci suma cifrelor poate fi doar 9 sau 18. Deoarece în orice mulţime de 18 numere consecutive există unul divizibil cu 18, acesta este divizibil cu suma cifrelor sale.

4. Cei şapte jucători observaţi de A_1 au de jucat câte şase partide, deci ei au jucat 0, 1, 2, 3, 4, 5, respectiv 6 partide. Dacă A_2 a jucat 6 partide atunci el a jucat cu toţi, deci nici unul dintre ceilalţi nu poate avea 0 partide, fals. Astfel, 6 partide au fost jucate de un jucător dintr-o altă echipă, să zicem B_1. Deci B_1 a jucat cu toţi, iar cel care a jucat 0 partide nu poate fi decât B_2. Dacă A_2 a jucat cinci partide atunci el a jucat cu fiecare din jucătorii echipelor C şi D, deci fiecare din aceştia a disputat cel puţin câte două partide (cu A_2 şi B_1) şi nimeni nu mai poate avea 1 partidă, fals. Aşadar, cinci partide au fost jucate de un alt jucător, C_1, iar cel care a jucat o partidă nu poate fi decât C_2. În sfârşit, dacă A_2 a jucat patru partide atunci el a jucat cu fiecare din jucătorii echipei D, deci fiecare din aceştia a disputat cel puţin câte trei partide (cu A_2, B_1 şi C_1) şi nimeni nu mai poate avea două partide, fals. Astfel, patru partide au fost jucate de către D_1, iar cel care a jucat două partide nu poate fi decât D_2. Rezultă astfel că A_2 şi A_1 au jucat câte trei partide (cu B_1, C_1 şi D_1).