Olimpiada Naţională de Matematică 2007

Clasa a V-a

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

CLASA A V-A

1. a) Un ciclu alergare + mers are 6 minute. Deoarece deplasarea durează 226' 16'' iar câtul împărțirii lui 226 la 6 este 37, rezultă că persoana merge timp de 37 minute.

b) Cele 37 minute de mers sunt echivalente cu 12'20'' de alergare. Dacă persoana ar alerga tot timpul, atunci deplasarea ar dura cu 24'40'' mai puțin, adică 3h 21'36''= 3+ 21/60 + 36/3600=84/25= 3,36 ore. Viteza cerută este 42 : 3,36 = 12,5 km/oră.

2. a) Resturile împărțirii la 3 a trei numere consecutive sunt 0, 1, 2. Al patrulea număr poate da restul 0, 1 sau 2, deci $r(B)$ este cel mult 5. **b)** Observăm că A conține 34 de numere care dau restul 2 la împărțirea cu 3. Deoarece fiecare mulțime trebuie să conțină câte două din aceste elemente, putem obține cel mult 17 asemenea mulțimi.

3. a) Numărul elementelor este $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$. **b)** Arătam că pentru orice două elemente diferite, diferența nu este divizibilă cu 16. Într-adevăr, aceasta diferență se termină cu $n \leq 3$ cifre de 0, în fața cărora se afla o cifră impară. Astfel, diferența este de forma $2^n \cdot 5^n \cdot m$, unde m este impar, deci nu este divizibilă cu 24.

4. Fie n_1, n_2, ... numerele din secvență. Deoarece $n_1 + n_2 + ... + n_7$ este par iar $n_1 + n_2 + ... + n_8$ este impar, reiese că n_8 este impar; analog pentru n_9, n_{10}, etc. Observăm că dacă secvența ar avea cel puțin 14 numere atunci suma $n_8 + n_9 + ... + n_{14}$ ar fi alcătuită din șapte numere impare, deci ar fi impară - imposibil. Astfel secvența are cel mult 13 numere. Pentru a încheia rezolvarea problemei, trebuie să vedem că putem construi o secvență cu 13 numere. Un exemplu este 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1.