Olimpiada de Matematică
faza judeţeană- Galaţi
7 martie-2009
Clasa a V-a

Problema 1. Fie a, b, c trei numere naturale care împărţite pe rând la 2009 dau resturile 1935, 700 şi 800. Să se determine restul împărţirii numărului $a+3\cdot b+5\cdot c$ la 2009.

Marcel Manea, profesor, Galaţi

Problema 2. Să se demonstreze că fracţia $\dfrac{8^n+2^n-\left(3^n+7^n\right)}{9^n-4^n}$ se poate simplifica printr-un număr natural diferit de zero şi de 1, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Milu Cîrmaciu, profesor, Galaţi

Problema 3. Să se determine numerele de forma $\overline{abcd}$, $a\neq 0$, ştiind că aceste numere verifică egalitatea: $3+6+9+...+\overline{abcd}=\overline{abcd000}$.

Ionel Patriche, profesor, Galaţi

Problema 4. Să se determine cel mai mic număr natural n, astfel încât numărul zerourilor cu care se termină numărul $(n+10)!$ să fie cu 2009 mai mare decât numărul zerourilor cu care se termină numărul $n!$(unde $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$).

Vasile Popa, profesor, Galaţi

<u>Notă</u>

1. Toate problemele sunt obligatorii
2. Timp efectiv de lucru 3 ore
3. Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Olimpiada de Matematică
faza județeană- Galați
7 martie-2009
Clasa a VI-a

Problema 1. Numărul natural n dă restul 3 la împărțirea prin 5 și restul 2 la împărțirea prin 7. Ce rest se obține la împărțirea lui n prin 35?

Viorica Bujor, profesor, Galați

Problema 2. Fie unghiul $\measuredangle AOB$ cu măsura de 91^0 și n puncte distincte $M_1, M_2, ..., M_n$, $n \in N^*$ aflate în interiorul unghiului $\measuredangle AOB$, astfel încât:
$\measuredangle AOM_1 \equiv \measuredangle M_1OM_2 \equiv ... \equiv \measuredangle M_nOB$.
Dacă unghiurile $\measuredangle AOB$ și $\measuredangle BOD$ sunt adiacente suplementare, se cere:

a) Să se determine cel mai mare număr natural n , unde $m(\measuredangle AOM_1) = x^0,\ x \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

b) Să se calculeze măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\measuredangle AOB$ și $\measuredangle BOD$

c) Dacă numărul natural n este determinat la punctul (a), punctul C se află în interiorul unghiului $\measuredangle AOB$, iar p si q sunt numere prime, unde $p^0 = m(\measuredangle AOC)$ si $q^0 = \mathrm{m}(\measuredangle BOC),\ p > q$, să se demonstreze că nu există o semidreaptă $[OM_i,\ i \in \{1,2,3,...,n\}$, care să fie bisectoare a unui unghi $\measuredangle(COM_p),\ p \in \{1,2,3,...,n\}$.

Milu Cîrmaciu, profesor, Galați

Problema 3. Să se determine câte numere naturale de forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ au proprietatea că numărul 4 divide numărul $(a+2)\cdot(b+2)\cdot(c+2)$, unde $a,b,c \in \{0,1,2,...,9\}$.

Vasile Popa, profesor, Galați

Problema 4. Să se determine restul împărțirii numărului $a = \underbrace{\overline{200920092009...2009}}_{2008 cifre}$ prin 21.

Dumitru și Rodica Balan, profesori, Galați

<u>**Notă**</u>

1. Toate problemele sunt obligatorii
2. Timp efectiv de lucru 3 ore
3. Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Olimpiada de Matematică –faza judeţeană- Galaţi
7 martie-2009
Clasa a V-a

Problema 1. Fie a, b, c trei numere naturale care împărţite pe rând la 2009 dau resturile 1935, 700 şi 800. Să se determine restul împărţirii numărului $a+3\cdot b+5\cdot c$ la 2009.

Manea Marcel, profesor, Galaţi

Soluţie:
$a=2009\cdot c_1+1935,\ b=2009\cdot c_2+700,\ c=2009\cdot c_3+800.$
Atunci
$$a+3\cdot b+5\cdot c=2009\cdot(c_1+3\cdot c_2+5\cdot c_3)+(1935+2100+4000)=2009\cdot(c_1+3\cdot c_2+5\cdot c_3)+8035=$$
$$=2009\cdot(c_1+3\cdot c_2+5\cdot c_3)+2009\cdot 3+2008=2009\cdot(c_1+3\cdot c_2+5\cdot c_3+3)+2008.$$
Aşadar, restul împărţirii este **2008.**

Problema 2. Să se demonstreze că fracţia $\dfrac{8^n+2^n-(3^n+7^n)}{9^n-4^n}$ se poate simplifica printr-un număr natural diferit de zero şi de 1, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Cîrmaciu Milu, profesor, Galaţi

Soluţie:
Se calculează ultima cifră (notată cu u.c.) a numerelor: 8^n ,2^n, 3^n,7^n.

$$\begin{cases} u.c.(8^{4\cdot k})=6\\ u.c.(2^{4\cdot k})=6\\ u.c.(3^{4\cdot k})=1\\ u.c.(7^{4\cdot k})=1\end{cases};\ \begin{cases} u.c.(8^{4\cdot k+1})=8\\ u.c.(2^{4\cdot k+1})=2\\ u.c.(3^{4\cdot k+1})=3\\ u.c.(7^{4\cdot k+1})=7\end{cases};\ \begin{cases} u.c.(8^{4\cdot k+2})=4\\ u.c.(2^{4\cdot k+2})=4\\ u.c.(3^{4\cdot k+2})=9\\ u.c.(7^{4\cdot k+2})=9\end{cases};\ \begin{cases} u.c.(8^{4\cdot k+3})=2\\ u.c.(2^{4\cdot k+3})=8\\ u.c.(3^{4\cdot k+3})=7\\ u.c.(7^{4\cdot k+3})=3\end{cases},\text{ oricare ar fi } \mathrm{k}\in\mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow$ în toate cele 4 cazuri: u.c.$\left(8^n+2^n-(3^n+7^n)\right)=0\Rightarrow$ numărătorul se divide cu 10

$$\begin{cases} u.c.(9^{2\cdot k})=1\\ u.c.(4^{2\cdot k})=6\end{cases};\begin{cases} u.c.(9^{2\cdot k+1})=9\\ u.c.(4^{2\cdot k+1})=4\end{cases},\text{ oricare ar fi } \mathrm{k}\in\mathbb{N}^*$$

In cele doua cazuri, u.c.$(9^n - 4^n)$ este $5\Rightarrow$ numitorul se divide cu 5.
Aşadar, fracţia se simplifică prin 5.

Problema 3. Să se determine numerele de forma $\overline{abcd},\ a \neq 0$, ştiind că acest număr verifică egalitatea: $3+6+9+...+\overline{abcd} = \overline{abcd000}.$

Patriche Ionel, profesor, Galaţi

Soluţie:

Se observă că numărul $\overline{abcd} = 3\cdot x,\ x \in \mathbb{N}^*$. Egalitatea dată devine:

$3+6+9+...+3\cdot x = 3\cdot x\cdot 1000 \Leftrightarrow 3\cdot(1+2+3+...+x) = 3\cdot x\cdot 1000 \Leftrightarrow$

$1+2+3+...+x = x\cdot 1000 \Leftrightarrow \dfrac{x\cdot(x+1)}{2} = 1000\cdot x \Leftrightarrow x\cdot(x+1) = 2000\cdot x.$

Dar $x \neq 0$.Atunci x+1=2000 $\Leftrightarrow$ x=1999.

Deci $\overline{abcd} = 3\cdot 1999 = 5997.$

Problema 4. Să se determine cel mai mic număr natural n, astfel încât numărul zerourilor cu care se termină numărul $(n+10)!$ să fie cu 2009 mai mare decât numărul zerourilor cu care se termină numărul $n!$.(unde $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (n-1)\cdot n$).

Popa Vasile, profesor, Galaţi

Soluţie:

O condiţie pentru a satisface cerinţa problemei este ca 10^{2009} să dividă numărul $(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot...\cdot(n+10)$. Rezulta ca 5^{2009} divide $(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot...\cdot(n+10)$.

Deoarece printre numerele $n+1,\ n+2,\ ...,\ n+10$, exact două numere sunt multipli de 5, atunci unul se divide doar cu 5, iar celălalt obligatoriu se divide cu 5^{2008}.Rezultă că $n+10 \geq 5^{2008} \Rightarrow n \geq 5^{2008}-10$.

Arătăm că $n_0 = 5^{2008}-10$ este numărul căutat.

Fie $A = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n_0$. Arătăm că numărul A este de forma $A = B\cdot 10^p\cdot 2^{2009}$, p$\in \mathbb{N}^*$, iar B este număr natural cu ultima cifră diferită de zero.

Analizăm modul de obţinere a zerourilor cu care se termină numărul A.

Considerăm toate numerele mai mici decât n_0, care se divid cu 5, acestea sunt de forma $2^k\cdot 10^t\cdot u,\ t\geq 1,\ k\in\mathbb{N}$, u nu se divide cu 2 şi 5, sau de forma $5^l\cdot 10^s\cdot v,\ l\geq 1,\ s\in\mathbb{N}$, v nu se divide cu 2 şi 5. Pentru un număr de forma $5^l\cdot 10^s\cdot v$, asociem numărul de forma $2^l\cdot 10^s\cdot v$. Produsul acestora se termină în $l+s$ zerouri.

Observăm că 2^{2009} figurează ca factor în numărul A şi nu a fost considerat anterior. Forma lui A este justificată, iar numărul $A\cdot(n_0+1)\cdot(n_0+2)\cdot...\cdot(n_0+10)$ se termină cu 2009 zerouri mai mult decât numărul A.

Olimpiada de Matematică –faza judeţeană- Galaţi
7 martie-2009
Clasa a VI-a

Problema 1. Numărul natural n dă restul 3 la împărţirea prin 5 şi restul 2 la împărţirea prin 7. Ce rest se obţine la împărţirea lui n prin 35?

Viorica Bujor, profesor, Galaţi

Soluţie :

Din ipoteză, există $a,b \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $n = 5\cdot a + 3 = 7\cdot b + 2.$

Din teorema împărţirii cu rest, $a = 7\cdot c + r,\ c,r \in \mathbb{N},\ r \in \{0,1,2,...,6\}.$

Atunci, $5\cdot(7\cdot c + r) + 3 = 7\cdot b + 2 \Leftrightarrow 7\cdot(b - 5\cdot c) = 5\cdot r + 1 \Rightarrow 7 / 5\cdot r + 1.$

Dar $r \in \{0,1,2,...,6\}$.Se obţine că r=4 verifică relaţia.

Atunci, a=7 $\cdot$ c+4 $\Rightarrow$ n=35 $\cdot$ c+23. Aşadar, restul împărţirii lui n la 35 este 23.

Problema 2. Fie unghiul $\measuredangle AOB$ cu măsura de 91^0 şi $M_1, M_2, ..., M_n$, $n \in N^*$ puncte distincte aflate în interiorul unghiului $\measuredangle AOB$, astfel încât:

$\measuredangle AOM_1 \equiv \measuredangle M_1OM_2 \equiv ... \equiv \measuredangle M_nOB$.

Dacă unghiurile $\measuredangle AOB$ şi $\measuredangle BOD$ sunt adiacente suplementare, se cere:

a) Să se determine cel mai mare număr natural n, unde $m(\measuredangle AOM_1) = x^0,\ x \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

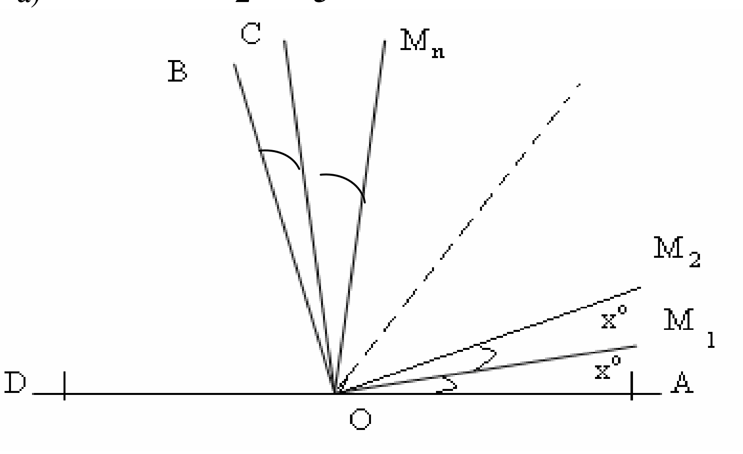
b) Să se calculeze măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\measuredangle AOB$ şi $\measuredangle BOD$

c) Dacă numărul natural n este determinat la punctul (a), punctul C se află în interiorul unghiului $\measuredangle AOB$, iar p si q sunt numere prime, unde $p^0 = m(\measuredangle AOC)$ si q^0=m$(\measuredangle BOC)$, $p > q$, să se demonstreze că nu există o semidreaptă $[OM_i$, $i \in \{1,2,3,...,n\}$, care să fie bisectoare a unui unghi $\measuredangle(COM_p),\ p \in \{1,2,3,...,n\}$.

Milu Cârmaciu, profesor, Galaţi

Soluţie :

a) 2^0 5^0



$$\left.\begin{array}{l}(n+1)\cdot x^0=91^0\\ \text{dar } n\in\mathbb{N},\ n\ge 1 \text{ şi ia valore maximă}\\ x\in N,\ x\ge 2\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}n+1=13\Rightarrow n=12\\ x=7^0\in\mathbb{N}\end{cases}$$

b) Cum unghiurile $\measuredangle(AOB)$ şi $\measuredangle(BOD)$ sunt adiacente suplementare, bisectoarele lor formează un unghi cu măsura de 90^0.

c).

$$\left.\begin{array}{l}m(\measuredangle COB)+m(COA)=91^0\\ m(\measuredangle \text{COB})=q^0\\ m(\measuredangle \text{COA})=p^0\\ p>q,\ p,q \text{ numere prime}\end{array}\right\}\Rightarrow m(\measuredangle COB)=2^0;\ \text{m}(\measuredangle \text{COA})=89^0 \text{(de demonstrat unicitatea)}$$

Rezultă că $m(\measuredangle COM_n)=5^0$

Demonstrăm prin metoda reducerii la absurd.

Presupunem că există $[OM_i,\ i\in\{1,2,3,...,n\}$, bisectoare a unghiului $\measuredangle(COM_p)$, unde p$\in\{1,2,...,12\}$.

Notăm cu y numărul de unghiuri adiacente cu măsura de 7^0.

Avem: $\frac{5+y\cdot 7}{2}=7\cdot k,\ \text{k}\in\mathbf{N}^*\Rightarrow$ y = $\frac{14\cdot k-5}{7}=2\cdot k-\frac{5}{7}\notin\mathbf{N}^*$, pentru orice k$\in\mathbb{N}^*$. Contradicţie.

Rezultă că presupunerea este falsă, de unde rezultă că nu există o semidreaptă $[OM_i,\ i\in\{1,2,3,...,n\}$ care să fie bisectoare a unui unghi $\measuredangle(COM_p),\ p\in\{1,2,3,...,n\}$.

Problema 3. Să se determine câte numere naturale de forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ au proprietatea că numărul 4 divide numărul $(a+2)\cdot(b+2)\cdot(c+2)$, unde $a,b,c \in \{0,1,2,...,9\}$.

Popa Vasile, profesor, Galaţi

Soluţie :

Observăm că în total sunt 1000 numere de forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, cu $a,b,c \in \{0,1,2,...,9\}$

Metoda I

Sunt posibile următoarele cazuri:

I. Unul din numerele a,b,c este par, iar celelalte impare. Fie a număr par iar b, c numere impare. Atunci a+2 este număr par şi 4 divide a +2. Rezultă că $a \in \{2,6\}$, $b,c \in \{1,3,5,7,9\}$.

Deci sunt $2\cdot 25 = 50$ de numere. În total $3\cdot 50 = 150$ numere.

II. Două numere sunt pare şi unul impar. Fie a,b numere pare şi c număr impar $. \Rightarrow a,b \in \{0,2,4,6,8\}, c \in \{1,3,5,7,9\} \Rightarrow 5\cdot 5\cdot 5 = 125$ numere. .

Total: $3\cdot 125 = 375$ numere.

III. Toate numerele sunt pare $\Rightarrow 5\cdot 25 = 125$ numere.

Rezultat=150+375+125=**650 numere**.

Metoda II.

Numărăm tripletele (a,b,c) pentru care 4 nu divide numărul $(a+2)\cdot(b+2)\cdot(c+2)$

Cazul I. Toate numerele impare $\Rightarrow 5\cdot 5\cdot 5 = 125$ numere;

Cazul II.Un număr par din mulţimea $\{0,4,8\}$ şi celelalte numere impare $\Rightarrow 3\cdot(3\cdot 5\cdot 5) = 225$ numere.

Total numere 125 + 225=350numere.

Aşadar, 1000-350=**650** numere –soluţia problemei.

Problema 4. Să se determine restul împărţirii numărului $a = \underbrace{\overline{200920092009...2009}}_{2008 cifre}$ prin 21.

Dumitru şi Rodica Balan, profesori, Galaţi

Soluţie:

$$a = 2009\cdot 10^{2004} + 2009\cdot 10^{2000} + ... + 2009\cdot 10^4 + 2009 =$$
$$= 2009\cdot(9+1)^{2004} + 2009\cdot(9+1)^{2000} + ... + 2009\cdot(9+1)^4 + 2009 =$$
$$2009\cdot(M_9+1) + 2009\cdot(M_9+1) + ... + 2009\cdot(M_9+1) + 2009 =$$
$$2009\cdot(M_9+M_9+...+M_9) + \left(\underbrace{2009+2009+...+2009}_{502 ori}\right) = 2009\cdot M_9 + 2009\cdot 502$$
$$= 287\cdot 7\cdot M_9 + 48024\cdot 21 + 14 = 287\cdot M_{21} + M_{21} + 14 = M_{21} + 14$$

(S-a notat cu M_k multiplul numărului k, $k \in \mathbb{N}^*$).

Aşadar, restul împărţirii numărului **a** prin 21 este **14.**

Olimpiada de Matematică –faza judeţeană- Galaţi
7 martie-2009
Clasa a V-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluţie, rezolvare	Punctaj
1.	$a=2009\cdot c_1+1935,\ b=2009\cdot c_2+700,\ c=2009\cdot c_3+800.$	3p
	$a+3\cdot b+5\cdot c=2009\cdot(c_1+3\cdot c_2+5\cdot c_3)+(1935+2100+4000)=2009\cdot(c_1+3\cdot c_2+5\cdot c_3)+8035=$ $=2009\cdot(c_1+3\cdot c_2+5\cdot c_3)+2009\cdot 3+2008=2009\cdot(c_1+3\cdot c_2+5\cdot c_3+3)+2008.$	3p
	Restul împărţirii este 2008	1p
2.	$\begin{cases} u.c.(8^{4\cdot k})=6\\ u.c.(2^{4\cdot k})=6\\ u.c.(3^{4\cdot k})=1\\ u.c.(7^{4\cdot k})=1\end{cases};\ \begin{cases} u.c.(8^{4\cdot k+1})=8\\ u.c.(2^{4\cdot k+1})=2\\ u.c.(3^{4\cdot k+1})=3\\ u.c.(7^{4\cdot k+1})=7\end{cases};\ \begin{cases} u.c.(8^{4\cdot k+2})=4\\ u.c.(2^{4\cdot k+2})=4\\ u.c.(3^{4\cdot k+2})=9\\ u.c.(7^{4\cdot k+2})=9\end{cases};\ \begin{cases} u.c.(8^{4\cdot k+3})=2\\ u.c.(2^{4\cdot k+3})=8\\ u.c.(3^{4\cdot k+3})=7\\ u.c.(7^{4\cdot k+3})=3\end{cases},\ k\in\mathbb{N}^*$ $\Rightarrow$ în toate cele 4 cazuri: u.c.$\left(8^n+2^n-(3^n+7^n)\right)$ este 0 $\Rightarrow$ numărătorul se divide cu 10	3p
	$\begin{cases} u.c.(9^{2\cdot k})=1\\ u.c.(4^{2\cdot k})=6\end{cases};\ \begin{cases} u.c.(9^{2\cdot k+1})=9\\ u.c.(4^{2\cdot k+1})=4\end{cases},\ k\in\mathbb{N}^*$ In cele doua cazuri, u.c.(9^n-4^n) este 5 $\Rightarrow$ numitorul se divide cu 5 .	2p
	Aşadar, fracţia se simplifică prin 5.	2p
3	Se observă că numărul $\overline{abcd}=3\cdot x,\ x\in\mathbb{N}^*$.	1p
	Egalitatea dată devine: $3+6+9+...+3\cdot x=3\cdot x\cdot 1000 \Leftrightarrow 3\cdot(1+2+3+...+x)=3\cdot x\cdot 1000 \Leftrightarrow$ $1+2+3+...+x=x\cdot 1000 \Leftrightarrow \dfrac{x\cdot(x+1)}{2}=1000\cdot x \Leftrightarrow x\cdot(x+1)=2000\cdot x.$	3p
	Dar $x\neq 0$.Atunci x+1=2000 $\Leftrightarrow$ x=1999. Deci $\overline{abcd}=3\cdot 1999=5997.$	3p
4	O condiţie pentru a satisface cerinţa problemei este ca 10^{2009} să dividă	2p

	produsul de factori $(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot(n+10)$. Rezulta ca 5^{2009} divide $(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot(n+10)$.	
	Deoarece printre numerele $n+1,\ n+2,\ \ldots,\ n+10$, exact două numere sunt multipli de 5, atunci unul se divide doar cu 5, iar celălalt obligatoriu se divide cu 5^{2008}	**2p**
	Rezultă că $n+10 \geq 5^{2008} \Rightarrow n \geq 5^{2008}-10$.	**1p**
	Arătăm că $n_0 = 5^{2008}-10$ este numărul căutat. Fie $A = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n_0$. Arătăm că numărul A este de forma $A = B\cdot 10^p\cdot 2^{2009}$, $p\in\mathbb{N}^*$, iar B este număr natural cu ultima cifră diferită de zero. Analizăm modul de obţinere a zerourilor cu care se termină numărul A. Considerăm toate numerele mai mici decât n_0, care se divid cu 5, acestea sunt de forma $2^k\cdot 10^t\cdot u$, $t\geq 1$, $k\in\mathbb{N}$, u nu se divide cu 2 şi 5, sau de forma $5^l\cdot 10^s\cdot v$, $l\geq 1$, $s\in\mathbb{N}$, v nu se divide cu 2 şi 5. Pentru un număr de forma $5^l\cdot 10^s\cdot v$, asociem numărul de forma $2^l\cdot 10^s\cdot v$. Produsul acestora se termină în $l+s$ zerouri. Observăm că 2^{2009} figurează ca factor în numărul A şi nu a fost considerat anterior. Forma lui A este justificată, iar numărul $A\cdot(n_0+1)\cdot(n_0+2)\cdot\ldots\cdot(n_0+10)$ se termină cu 2009 zerouri mai mult decât numărul A.	**2p**

Olimpiada de Matematică –faza judeţeană- Galaţi
7 martie-2009
Clasa a VI-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	Din ipoteză, există $a, b \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $n = 5 \cdot a + 3 = 7 \cdot b + 2.$	**1p**
	Din teorema împărţirii cu rest, $a = 7 \cdot c + r,\ c, r \in \mathbb{N},\ r \in \{0,1,2,...,6\}$	**2p**
	Atunci, $5 \cdot (7 \cdot c + r) + 3 = 7 \cdot b + 2 \Leftrightarrow 7 \cdot (b - 5 \cdot c) = 5 \cdot r + 1 \Rightarrow 7 / 5 \cdot r + 1.$	**2p**
	Atunci, a=7 $\cdot$ c+4 $\Rightarrow$ n=35 $\cdot$ c+23. Aşadar, restul împărţirii lui n la 35 este 23	**2p**
2.	Figura corect construită	**1p**
	$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{n}+1) \cdot x^0 = 91^0 \\ \text{dar } \mathrm{n} \in \mathbb{N},\ \mathrm{n} \geq 1 \text{ şi are valore maximă} \\ \mathrm{x} \in \mathrm{N},\ \mathrm{x} \geq 2\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} n+1 = 13 \Rightarrow n = 12 \\ x = 7^0 \in \mathbb{N}\end{cases}$	**2p**
	b) Cum unghiurile $\measuredangle(AOB)$ şi $\measuredangle(BOD)$ sunt adiacente suplementare, bisecto formează un unghi cu măsura de 90^0	**1p**
	$\left.\begin{array}{l} m(\measuredangle COB) + m(COA) = 91^0 \\ m(\measuredangle \mathrm{COB}) = q^0 \\ m(\measuredangle \mathrm{COA}) = p^0 \\ p > q,\ p, q \text{ numere prime}\end{array}\right\} \Rightarrow m(\measuredangle COB) = 2^0;\ \mathrm{m}(\measuredangle \mathrm{COA}) = 89^0$(de demonstrat unicitatea)	**1p**
	Rezultă că $m(\measuredangle COM_n) = 5^0$ Demonstrăm prin metoda reducerii la absurd. Presupunem că există $[OM_i,\ i \in \{1,2,3,...,n\}$, bisectoare a unghiului $\measuredangle(COM_p)$, unde p$\in$ {1,2,...,12}. Notăm cu y numărul de unghiuri adiacente cu măsura de 7^0 . Avem: $\frac{5 + y \cdot 7}{2} = 7 \cdot k,\ \mathrm{k} \in \mathbf{N}^* \Rightarrow\ \mathrm{y} = \frac{14 \cdot k - 5}{7} = 2 \cdot k - \frac{5}{7} \notin \mathbf{N}^*$, pentru orice $\mathrm{k} \in \mathbb{N}^*$. Contradicţie. Rezultă că presupunerea este falsă, de unde rezultă că nu	**2p**

	există o semidreaptă $[OM_i$, $i \in \{1,2,3,...,n\}$ care să fie bisectoare a unui unghi $\measuredangle(COM_p)$, $p \in \{1,2,3,...,n\}$.	
3	Observăm că în total sunt 1000 numere de forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, cu $a,b,c \in \{0,1,2,...,9\}$	**1p**
	Sunt posibile următoarele cazuri: I. Unul din numerele a,b,c este par, iar celelalte impare. Fie a număr par iar b, c numere impare. Atunci a+2 este număr par şi 4 divide a +2 . Rezultă că $a \in \{2,6\}$, $b,c \in \{1,3,5,7,9\}$. Deci sunt $2 \cdot 25 = 50$ de numere. În total $3 \cdot 50 = 150$ numere.	**2p**
	II. Două numere sunt pare şi unul impar. Fie a,b numere pare, iar c număr impar $. \Rightarrow a,b \in \{0,2,4,6,8\}, c \in \{1,3,5,7,9\} \Rightarrow 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ numere. Total: $3 \cdot 125 = 375$ numere.	**2p**
	III. Toate numerele sunt pare $\Rightarrow 5 \cdot 25 = 125$ numere.	**1p**
	Rezultat=150+375+125=**650 numere**.	**1p**
4	$a = 2009 \cdot 10^{2004} + 2009 \cdot 10^{2000} + ... + 2009 \cdot 10^4 + 2009 =$	**2p**
	$= 2009 \cdot (9+1)^{2004} + 2009 \cdot (9+1)^{2000} + ... + 2009 \cdot (9+1)^4 + 2009 =$	**2p**
	$= 2009 \cdot (M_9 + 1) + 2009 \cdot (M_9 + 1) + ... + 2009 \cdot (M_9 + 1) + 2009 =$ $2009 \cdot (M_9 + M_9 + ... + M_9) + \left(\underbrace{2009 + 2009 + ... + 2009}_{502 ori} \right) =$	**2p**
	$= 2009 \cdot M_9 + 2009 \cdot 502$ $= 287 \cdot 7 \cdot M_9 + 48024 \cdot 21 + 14 = 287 \cdot M_{21} + M_{21} + 14 = M_{21} + 14$ (S-a notat cu M_k multiplul numărului k, $k \in \mathbb{N}^*$). Restul împărţirii numărului **a** prin 21 este **14.**	**1p**