A 52-a Olimpiadă Națională de Matematică
Etapa finală
Enunțuri

Clasa a VII-a

Problema 1. Să se arate că nu există numere întregi a și b astfel încât $a^3+a^2b+ab^2+b^3=2001$.

***

Problema 2. Fie a și b numere reale strict pozitive, distincte. Considerăm mulțimea:

$$M=\{ax+by \mid x, y\in \mathbf{R}, x>0, y>0, x+y=1\}.$$

Să se demonstreze că :

i) $\dfrac{2ab}{a+b}\in M$;

ii) $\sqrt{ab}\in M$.

Romeo Ilie

Problema 3. Se consideră un trapez dreptunghic $ABCD$, în care $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $AD\perp AB$ și $AD > CD$. Diagonalele AC și BD se intersectează în O. Paralela prin O la AB intersectează AD în E și BE intersectează CD în F. Să se demonstreze că $CE\perp AF$ dacă și numai dacă $AB\cdot CD=AD^2-CD^2$.

***

Problema 4. Se consideră unghiul ascuțit ABC. Pe semidreapta $(BC$ se consideră punctele distincte P și Q care se proiectează pe dreapta AB în punctele M și N, unde M, $N\in(AB)$. Știind că $AP=AQ$ și $AM^2-AN^2=BN^2-BM^2$, să se determine măsura unghiului ABC.

Mircea Fianu

Clasa a VIII–a

Problema 1. Să se determine numerele reale a şi b ştiind că $a+b\in\mathbf{Z}$ şi $a^2+b^2=2$.

Romeo Ilie

Problema 2. Pentru fiecare număr raţional $m > 0$ considerăm funcţia $f_m:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_m(x)=\frac{1}{m}x+m$. Notăm cu G_m graficul funcţiei f_m. Fie p, q şi r numere raţionale pozitive.

a) Să se arate că dacă p şi q sunt distincte, atunci $G_p\cap G_q$ este nevidă.

b) Să se arate că dacă $G_p\cap G_q$ este un punct de coordonate numere întregi, atunci p şi q sunt numere întregi.

c) Să se arate că dacă p, q, r sunt numere naturale consecutive, atunci aria triunghiului determinat de intersecţiile graficelor G_p, G_q şi G_r este egală cu 1.

Mircea Fianu

Problema 3. Se consideră punctele A, B, C, D necoplanare astfel încât $AB\perp CD$ şi $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.

a) Să se demonstreze că $AC\perp BD$.

b) Să se demonstreze că dacă $CD < BC < BD$, atunci măsura unghiului dintre planele (ABC) şi (ADC) este mai mare decât 60°.

Sorin Peligrad

Problema 4. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, de muchie a, planul $(AB'D')$ intersectează planele $(A'BC)$, $(A'CD)$, $(A'DB)$ după dreptele d_1, d_2, şi respectiv d_3.

a) Să se arate că dreptele d_1, d_2, d_3 sunt concurente două câte două.

b) Să se determine aria triunghiului format de cele trei drepte.

***

Clasa a IX-a

Problema 1. Fie A o mulţime de numere reale care verifică:

a) $1\in A$;

b) $x\in A \Rightarrow x^2\in A$;

c) $x^2-4x+4\in A \Rightarrow x\in A$.

Să se arate că $2000+\sqrt{2001}\in A$.

Lucian Dragomir

Problema 2. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi $D\in(AC)$ piciorul bisectoarei unghiului B. Să se demonstreze că $BC-BD=2AB$ dacă şi numai dacă $\frac{1}{BD}-\frac{1}{BC}=\frac{1}{2AB}$.

Dan Brânzei

Problema 3. Fie $n\in\mathbf{N}^*$ şi $v_1, v_2,\ldots, v_n$ vectori în plan cu lungimi mai mici sau egale cu 1. Să se demonstreze că există $\varepsilon_1, \varepsilon_2,\ldots, \varepsilon_n\in\{-1,1\}$ astfel încât

$$|\varepsilon_1 v_1+\varepsilon_2 v_2+\ldots+\varepsilon_n v_n|\le\sqrt{2}.$$

Mihai Bălună

Problema 4. Să se determine sistemele ordonate (x, y, z) de numere raţionale pozitive pentru care $x+\frac{1}{y}$, $y+\frac{1}{z}$ şi $z+\frac{1}{x}$ sunt numere întregi.

Mircea Becheanu

Clasa a X-a

Problema 1. Fie a şi b numere complexe nenule şi z_1, z_2 rădăcinile polinomului $X^2 + aX + b$. Să se arate că $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ dacă şi numai dacă există un număr real $\lambda \geq 4$ astfel încât $a^2 = \lambda b$.

Valentin Matrosenco

Problema 2. În tetraedrul $OABC$ se notează cu α, β, γ măsurile unghiurilor $\angle BOC$, $\angle COA$ şi, respectiv, $\angle AOB$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma < 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Dinu Şerbănescu

Problema 3. Fie m, k numere naturale nenule, $k < m$ şi fie M o mulţime cu m elemente. Să se demonstreze că numărul maxim de submulţimi $A_1, A_2, \dots, A_p$ ale lui M pentru care $A_i \cap A_j$ are cel mult k elemente, oricare ar fi $1 \leq i < j \leq p$, este

$$p_{\max} = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \dots + \binom{m}{k+1}.$$

(*Se poate folosi notaţia* $\binom{m}{k} = C_m^k$)

Mihai Manea

Problema 4. Fie $n \geq 2$ un număr natural par şi a, b numere reale astfel încât $b^n = 3a + 1$. Să se arate că polinomul $P(X) = (X^2 + X + 1)^n - X^n - a$ se divide cu $Q(X) = X^3 + X^2 + X + b$ dacă şi numai dacă $b = 1$.

Mircea Becheanu

Clasa a XI-a

Problema 1. Fie f: **R**$\to$**R** o funcţie continuă pe **R**, derivabilă pe **R**$\setminus\{x_0\}$, având derivate laterale finite în x_0. Arătaţi că există o funcţie g: **R**$\to$**R** derivabilă, o funcţie h: **R**$\to$**R** de gradul întâi şi $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$ astfel încât:

$$f(x) = g(x) + \alpha|h(x)|, \ \forall x \in \mathbf{R}.$$

Radu Gologan

Problema 2. Se consideră o matrice $A \in M_n(\mathbf{C})$, de rang r, unde $n \geq 2$ şi $1 \leq r \leq n-1$.

a) Să se arate că există $B \in M_{n,r}(\mathbf{C})$, $C \in M_{r,n}(\mathbf{C})$, cu rang B = rang $C = r$, astfel încât $A = BC$;

b) Arătaţi că matricea A verifică o ecuaţie polinomială de grad $r+1$, cu coeficienţi complecşi.

Mircea Becheanu şi Ion Savu

Problema 3. Fie f: **R**$\to[0, \infty)$ o funcţie cu proprietatea: $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, pentru orice $x, y \in$ **R**. Să se arate că:

a) dacă $\lim\limits_{n\to\infty} f(x+n) = \infty$, oricare ar fi $x \in$ **R**, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$;

b) dacă $\lim\limits_{n\to\infty} f(x+n) = a$, $a \in [0, \infty)$, oricare ar fi $x \in$ **R**, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$.

Mihai Piticari şi Sorin Rădulescu

Problema 4. Funcţia f: $[0,1]\to$**R** este continuă şi are proprietatea:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right) = 0, \text{ pentru orice } x \in [0,1).$$

Să se arate că:

a) pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $\lambda \in (0,1)$, avem: $\sup\{x \in [0, \lambda) \mid |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon x\} = \lambda$;

b) f este funcţie constantă.

Cristinel Mortici

Clasa a XII-a

Problema 1. a) Fie polinomul $P(X)=X^5\in\mathbf{R}[X]$. Arătați că pentru orice $\alpha\in\mathbf{R}^*$, polinomul $P(X+\alpha)-P(X)$ nu are rădăcini reale.

b) Fie $P\in\mathbf{R}[X]$ un polinom de gradul $n\geq 2$, cu rădăcinile reale și distincte. Arătați că există $\alpha\in\mathbf{Q}^*$ astfel încât polinomul $P(X+\alpha)-P(X)$ să aibă toate rădăcinile reale.

Radu Gologan

Problema 2. Fie A un inel finit. Să se arate că există două numere naturale m, p, $m>p\geq 1$, astfel încât

$$a^m=a^p,\ \forall a\in A.$$

Ion Savu

Problema 3. Fie $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$ o funcție continuă. Arătați că:

a) dacă $\int_0^1 f(\sin(x+\alpha))\mathrm{d}x=0$, pentru orice $\alpha\in\mathbf{R}$, atunci $f(x)=0, \forall x\in[-1,1]$;

b) dacă $\int_0^1 f(\sin nx)\mathrm{d}x=0$, pentru orice $n\in\mathbf{Z}$, atunci $f(x)=0, \forall x\in[-1,1]$.

Dorin Andrica și Mihai Piticari

Problema 4. Fie $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ o funcție periodică, de perioadă 1, integrabilă pe $[0,1]$. Pentru un șir $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_0=0$, strict crescător și nemărginit cu $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$, notăm $r(n)=\max\{k\mid x_k\leq n\}$.

a) Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r(n)}(x_k-x_{k-1})f(x_k)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

b) Utilizând eventual rezultatul de la punctul a), demonstrați că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\ln k)}{k}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

Cristinel Mortici

A 52-a Olimpiadă Națională de Matematică
Etapa județeană
Soluții

Clasa a VII-a

Problema 1. Observăm că egalitatea se scrie $(a^2+b^2)(a+b)=1\cdot 3\cdot 23\cdot 29$. Rezultă că numerele a^2+b^2 și $a+b$ sunt impare, deci a, b au parități diferite iar a^2+b^2 este un număr de forma $4k+1$, $k\in\mathbf{N}$. Astfel, a^2+b^2 poate fi doar 1, 29, $3\cdot 23=69$ sau 2001. Obținem

- $a^2+b^2=1\Rightarrow a, b\in\{0,-1,1\}\Rightarrow a+b\neq 2001$;
- $a^2+b^2=29\Rightarrow a, b\in\{-5,5,-2,2\}\Rightarrow a+b\neq 69$;
- $a^2+b^2=69$, imposibil;
- $a^2+b^2=2001$, imposibil.

Problema 2.

i) $\dfrac{2ab}{a+b}=ax+by\Rightarrow\dfrac{2ab}{a+b}=ax+(1-x)b\Rightarrow x=\dfrac{b}{a+b}\in(0;1)$ și

$y=\dfrac{a}{a+b}\in(0;1)$

ii) $\sqrt{ab}=ax+by\Rightarrow\sqrt{ab}=ax+(1-x)b\Rightarrow$

$x=\dfrac{\sqrt{ab}-b}{a-b}\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\in(0;1)$ și $y=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\in(0;1)$

Problema 3.

Notăm $CE\cap AB=\{G\}$. Ducem $AH\parallel CG, H\in DC$.

Cum $OE\parallel DC\parallel AB\Rightarrow\dfrac{DF}{AB}=\dfrac{DE}{EA}=\dfrac{CO}{OA}=\dfrac{DC}{AB}\Rightarrow DF=DC$

Cum $OE\parallel DC\parallel AB\Rightarrow\dfrac{DC}{AG}=\dfrac{DE}{EA}=\dfrac{CO}{OA}=\dfrac{DC}{AB}\Rightarrow AG=AB$

$AHCG$ paralelogram $\Rightarrow CH=AB$.

$CE\perp AF\Leftrightarrow AF\perp AH\Leftrightarrow AD^2=DF\cdot DH\Leftrightarrow AD^2=DC^2+AB\cdot DC\Leftrightarrow AB\cdot DC=AD^2-DC^2$.

Punctele M şi N sunt diferite, în ordinea A, N, M, B. Relaţia

$$AM^2 - AN^2 = BN^2 - BM^2$$

este echivalentă cu

$$(AN + MN)^2 - AN^2 - (BM + MN)^2 + BM^2 = 0,$$

deci $2MN(AN - BM) = 0$, de unde $AN=BM$ (analog pentru ordinea A,M,N,B). Fie T mijlocul segmentului PQ. Cum $AQ = AP$ rezultă $AT \perp PQ$. Dacă $TS \perp AB$ atunci TS este linie mijlocie în trapezul $QNMP$ deci $SN = SM$. Prin urmare $AS=SB$, deci triunghiul ATB este isoscel şi dreptunghic. În consecinţă, $m(\angle ABC) = 45^\circ$.

Clasa aVIII-a

Problema 1.

$(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2) \Rightarrow (a+b)^2 \le 4 \Rightarrow |a+b| \le 2$

$\Rightarrow a+b \in \{-2;-1;0;1;2\}$

Se notează $a+b=k \Rightarrow 2a^2 - 2ak + k^2 - 2 = 0$. Pentru valorile lui k aflate obţinem :

$$(a,b) \in \left\{(1,-1),(-1,1),\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\right\} \cup$$

$$\cup \left\{\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right),(1,1),(-1,-1)\right\}$$

Problema 2

a) Dacă $(\alpha,\beta) \in G_p \cap G_q$, atunci $\frac{1}{p}\alpha + p = \beta$ şi $\frac{1}{q}\alpha + q = \beta$. Rezolvând sistemul, obţinem $\alpha = pq$ şi $\beta = p+q$, deci $G_p \cap G_q = \{(pq, p+q)\}$.

b)Fie $p = \frac{a}{b}$, $q = \frac{c}{d}$, fracţii ireductibile. Avem $p + q = \frac{ad+bc}{bd} \in \mathbf{N}$ şi

$pq = \frac{ac}{bd} \in \mathbf{N}$, de unde rezultă $b \mid d$ şi $d \mid b$. Deducem că $b=d=1$, deci $p,q \in \mathbf{Z}$.

c) Fie $r=q+1=p+2$. Avem $f_p(0)=p$, $f_q(0)=p+1$, $f_r(0)=p+2$, $G_p \cap G_q=\{(pq, p+q)\}=\{A\}$, $G_p \cap G_r=\{(pr, p+r)\}=\{B\}$, $G_r \cap G_q=\{(rq, r+q)\}=\{C\}$, iar $\{P\}=G_p \cap Oy$, $\{Q\}=G_q \cap Oy$, $\{R\}=G_r \cap Oy$. Avem:

aria(ABC)= aria(CQR)– aria($ABRQ$)=aria(CQR)–(aria(BPR)–aria(AQP))=

$$=\frac{qr \cdot RQ}{2} - \left(\frac{pr \cdot PR}{2} - \frac{pq \cdot PQ}{2}\right) = \frac{(p+2)(p+1)}{2} - \frac{p(p+2)\cdot 2}{2} + \frac{p(p+1)}{2} = 1.$$

Problema 3.

a) Din $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 \Rightarrow AD \perp BC$. Ducem $AO \perp (DBC)$. Rezultă că O este ortocentrul triunghiului BCD, de unde $AC \perp BD$.

b) Ducem $DN \perp AC$, deci $BN \perp AC$. Din $BN < BC$, $DN < DC$ şi ipoteză rezultă că BD este cea mai mare latură a triunghiului BDN, de unde concluzia.

Problema 4.

a) Fie E şi G centrele pătratelor $ABB'A'$, respectiv $ADD'A'$ şi F centrul de greutate al triunghiului $AB'D'$. Atunci $d_1 = EF$, $d_2 = FG$, $d_3 = EG$.

b) Avem $EF = FG = \frac{a\sqrt{6}}{6}$, $GE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, deci aria cerută este $\frac{a^2\sqrt{3}}{24}$.

Clasa a IX-a

Problema 1. Fie $x \in A$; din b) obţinem $x^2 \in A$, deci $[(x+2)-2]^2 \in A$, iar din c) rezultă acum că $x+2 \in A$ (*). Din $1 \in A$ şi remarca (*) reiese prin inducţie că A conţine toate numerele impare pozitive. Astfel, $2001 = [(\sqrt{2001}+2)-2]^2 \in A$, deci $\sqrt{2001}+2 \in A$. Folosind din nou (*), rezultă concluzia.

Problema 2. Fie $u = m(\angle ABD)$. Atunci

$$BD = \frac{c}{\cos u},\ BC = \frac{c}{\cos 2u}$$

deci relaţiile din enunţ devin

$$\frac{1}{\cos 2u} = \frac{1}{\cos u} + 2 \text{ şi } \cos u = \cos 2u + \frac{1}{2}$$

Notând $\cos u = x$ obţinem ecuaţiile $4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$ şi $4x^2 - 2x - 1 = 0$.

Deoarece $4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = (x+1)(4x^2 - 2x - 1)$ şi $x \neq -1$, cele două ecuaţii sunt echivalente.

Problema 3. Dacă $n = 1$, afirmaţia este evidentă, iar pentru $n = 2$ avem

$$|v_1+v_2|^2+|v_1-v_2|^2=2(|v_1|^2+|v_2|^2)\le 4 \Rightarrow |v_1+v_2| \le\sqrt{2} \text{ sau } |v_1-v_2|\le\sqrt{2}.$$

Pentru $n \geq 3$ raţionăm prin inducţie. Presupunem proprietatea adevărată pentru $n-1$ şi considerăm un sistem de n vectori nenuli $v_1, v_2, \dots, v_n$. Doi dintre vectorii $\pm v_1, \pm v_2, \pm v_3$, de exemplu v_1 şi v_2, fac între ei un unghi de cel mult 60°. Atunci $|v_1 - v_2| \leq 1$; aplicând ipoteza de inducţie pentru $v_1 - v_2$ şi $v_3, v_4, \dots, v_n$ rezultă că există $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1} \in \{-1, 1\}$ astfel încât

$$|\varepsilon_1 v_1 - \varepsilon_1 v_2 + \varepsilon_2 v_3 + \dots + \varepsilon_{n-1} v_n| \le\sqrt{2}.$$

Problema 4. Fie $x + \frac{1}{y} = a,\ y + \frac{1}{z} = b,\ z + \frac{1}{x} = c$. Atunci

$$y = \frac{1}{a-x},\ z = \frac{1}{b-y} = \frac{a-x}{ab-1-bx}, \text{ deci}$$

$$\frac{a-x}{ab-1-bx} + \frac{1}{x} = c \Leftrightarrow (bc-1)x^2 + (a-b+c-abc)x + ab - 1 = 0. \ (*)$$

Dacă $bc = 1$ atunci $b = 1$, $c = 1$, de unde $a = 1$, situaţie în care nu toate numerele x, y, z sunt pozitive (analog se exclud cazurile $ac = 1$, $ab = 1$).

Dacă $bc > 1$, discriminantul ecuaţiei este

$\Delta = (a-b+c-abc)^2 - 4(bc-1)(ab-1) = (abc-a-b-c)^2 - 4$.

Pentru ca x să fie raţional este necesar ca Δ să fie pătrat perfect, ceea ce nu este posibil decât dacă $abc - a - b - c = \pm 2$.

Deoarece $abc - a - b - c = a(bc-1) - b - c \geq bc - 1 - b - c = (b-1)(c-1) - 2 \geq -2$, relaţia $abc - a - b - c = -2$ nu poate avea loc decât dacă toate inegalităţile precedente devin egalităţi, ceea ce ar conduce la $ab = 1$ sau $ac = 1$ sau $bc = 1$, imposibil.

Aceleaşi inegalităţi ne arată că egalitatea $abc - a - b - c = 2$ nu poate avea loc dacă $a, b, c \geq 3$, deci cel puţin unul dintre numere este 1 sau 2.

Dacă $a = 1$ atunci $(b-1)(c-1) = 4$, deci $b = c = 3$ sau $\{b, c\} = \{2, 5\}$. Aşadar

- $a = 1, b = 2, c = 5 \Rightarrow (x, y, z) = (1/3, 3/2, 2)$;
- $a = 1, b = 3, c = 3 \Rightarrow (x, y, z) = (1/2, 2, 1)$;
- $a = 1, b = 5, c = 2 \Rightarrow (x, y, z) = (2/3, 3, 1/2)$.

Dacă a este 2 atunci $(2b-1)(2c-1) = 9$, deci $b = c = 2$ sau $\{b, c\} = \{1, 5\}$.
Pentru $a = b = c = 2$ obţinem $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, iar celelate cazuri se reduc printr-o permutare circulară la cele analizate mai sus.
Prin permutarea circulară a soluţiilor găsite obţinem zece sisteme ordonate.

Clasa a X–a

Problema 1. Observăm că rădăcinile ecuaţiei sunt nenule, iar condiţia $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ este echivalentă cu: există numărul real $r > 0$ astfel încât $z_1 = rz_2$.
În cazul în care această relaţie este îndeplinită avem

$$\frac{a^2}{b} = \frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2} = \frac{(r+1)^2}{r} \geq 4.$$

Reciproc, dacă $a^2 = \lambda b$, $\lambda \geq 4$, atunci discriminantul ecuaţiei este $\Delta = a^2 - 4b = a^2(\lambda - 4)/\lambda$, şi

$$z_{1,2} = \frac{a}{2}\left(-1 \pm \sqrt{\frac{\lambda-4}{\lambda}}\right) \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{\lambda-4}}{\sqrt{\lambda} \mp \sqrt{\lambda-4}} = \frac{(\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{\lambda-4})^2}{4} = r > 0.$$

Problema 2. Relaţia se scrie

$$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\beta\cos^2\gamma < 1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + \cos^2\beta\cos^2\gamma \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)^2 < \sin^2\beta\sin^2\gamma \Leftrightarrow -\sin\beta\sin\gamma < \cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma < \sin\beta\sin\gamma \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos(\beta+\gamma) < \cos\alpha < \cos|\beta - \gamma|.$$

Deoarece $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$, ultima inegalitate este echivalentă cu

$$|\beta - \gamma| < \alpha < \min\{\beta + \gamma, 2\pi - \beta - \gamma\},$$

ceea ce rezultă din inegalităţile lui Euler pentru unghiurile plane ale unui triedru.

Problema 3. Alegând ca $A_1, A_2, \dots, A_p$ toate submulţimile lui M care au cel mult $k+1$ elemente obţinem o familie cu $C_m^0 + C_m^1 + \dots + C_m^{k+1}$ mulţimi care îndeplineşte relaţia din enunţ.
Fie acum $A_1, A_2, \dots, A_p$ o familie de mulţimi care îndeplineşte relaţia din enunţ.
Pentru fiecare A_i cu $|A_i| \geq k+1$ considerăm o mulţime $B_i \subset A_i$ astfel încât $|B_i| = k+1$. Atunci funcţia $A_i \mapsto B_i$, definită pentru mulţimile familiei care au cel puţin $k+1$ elemente şi cu valori în mulţimea submulţimilor lui M care au $k+1$ elemente este, conform enunţului, injectivă. Rezultă astfel că familia are cel mult C_m^{k+1} mulţimi care au mai mult de $k+1$ elemente şi, evident, cel mult $C_m^0 + \dots + C_m^k$ mulţimi care nu au mai mult de $k+1$ elemente.

Problema 4. Dacă $b = 1$ atunci $a = 0$ şi $Q(X) = (X+1)(X^2+1) \mid P(X)$.
Pentru reciprocă remarcăm mai întâi că $b \neq 0$ (altfel ar rezulta $P(\varepsilon) = 0$, unde ε este o rădăcină cubică a unităţii, de unde $|a| = |\varepsilon^n| = 1$, contradicţie cu ipoteza), deci rădăcinile z_1, z_2, z_3 ale lui Q sunt nenule. Din

$$z_1^2 + z_1 + 1 = -\frac{b}{z_1} = z_2 z_3$$

şi egalităţile analoage obţinem

$$0 = P(z_1) + P(z_2) + P(z_3) = \sum z_1^n z_2^n - \sum z_1^n - 3a = (1-z_1^n)(1-z_2^n)(1-z_3^n) - 1 - 3a + z_1^n z_2^n z_3^n =$$
$$= (1-z_1^n)(1-z_2^n)(1-z_3^n) - 1 - 3a + b^n = (1-z_1^n)(1-z_2^n)(1-z_3^n).$$

Rezultă astfel că, de exemplu, $z_1^n = 1$.

Cazul 1. Dacă $z_1 = 1$ atunci $b = -3$ şi $P(1) = 3^n - a - 1 = 0$, ceea ce nu corespunde cu ipoteza.

Cazul 2. Dacă $z_1 = -1$ atunci $b = 1$ şi $a = 0$.

Cazul 3. Dacă $z_1 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ atunci $|z_1| = 1$, deci $z_2 = \bar{z}_1 = 1/z_1$ şi $z_3 = -b$. Rezultă $Q(-b) = 0$, de unde $b = 1$ sau $b = 0$. Dacă $b = 0$ atunci $X \mid P(X) \Rightarrow a = 1$, ceea ce contrazice ipoteza, deci şi în acest caz obţinem $b = 1$, $a = 0$.

Clasa a XI-a

Problema 1. Fie $f'_s(x_0), f'_d(x_0)$ derivatele laterale ale lui f în x_0. Determinăm m astfel ca $g(x) = f(x) - m|x - x_0|$ să fie derivabilă pe $\mathbf{R}$. Este suficientă derivabilitatea in x_0. Dată fiind continuitatea lui f, deducem: $g'_s(x_0) = f'_s(x_0) + m$, $g'_d(x_0) = f'_d(x_0) - m$, deci

$$m = \frac{f'_d(x_0) - f'_s(x_0)}{2}.$$

Problema 2.

a) Fie $A = (a_1, \ldots, a_n)$, unde $a_1, \ldots, a_n \in M_{n,1}(\mathbf{C})$ sunt coloanele lui A. Dacă *rang* $A = r$, alegem r dintre aceste coloane care conţin un determinant de ordin r diferit de zero (coloane liniar independente). Fie acestea $a_{i1}, \ldots, a_{ir}$ şi definim $B = (a_{i1}, \ldots, a_{ir})$, $B \in M_{n,r}(\mathbf{C})$. Considerăm sistemele $Bx = a_k$, $1 \le k \le n$ şi $x \in M_{r,1}(\mathbf{C})$. Aceste sisteme sunt compatibile şi alegem x_k o soluţie a sistemului $Bx = a_k$, $1 \le k \le n$.

Definim $C = (x_1, \ldots, x_n) \in M_{r,n}(\mathbf{C})$. Atunci

$$BC = B(x_1, \ldots, x_n) = (Bx_1, \ldots, Bx_n) = (a_1, \ldots, a_n) = A$$

si cum rang $A = r$, rezultă $r = rang(BC) \le rang C \le r$, deci *rang* $C = r$ şi analog va rezulta *rang* $B = r$.

b) Fie $M = CB \in M_r(\mathbf{C})$ şi din teorema Hamilton–Cayley, M verifică o ecuaţie de grad r, $\alpha_r M^r + \ldots + \alpha_1 M + \alpha_0 I_r = 0$. Atunci avem

$$\alpha_r BM^r C + \ldots + \alpha_1 BMC + \alpha_0 BC = 0.$$

Dar

$$BM^k C = BCB\ldots CBC = (BC)^{k+1} = A^{k+1}, \text{ şi implicit}$$

$$\alpha_r A^{r+1} + \ldots + \alpha_1 A^2 + \alpha_0 A = 0.$$

Problema 3.

a) Presupunem că f nu are limita ∞. Atunci există $(x_n)_n$, $x_n \to \infty$ astfel încât $f(x_n) \to l \in [0, \infty)$. Avem: $|f(x_n) - f([x_n])| \le |x_n - [x_n]| < 1$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n) - f([x_n])| \le 1$, adica $\infty \le 1$.

b) Presupunem că f nu are limita a la infinit. Studiem cazul când există $(x_n)_n$, $x_n \to \infty$ cu $f(x_n) \to b \in [0, \infty), b \neq a$. Fie $(x_{p_n}) \sqsubseteq (x_n)$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_{p_n}\} = c$. Avem

$$|f(x_{p_n}) - f([x_{p_n}] + c)| \le |x_{p_n} - [x_{p_n}] - c| = |\{x_{p_n}\} - c|,$$

iar de aici, $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_{p_n}) - f([x_{p_n}] + c)| \le \lim\limits_{n\to\infty} |\{x_{p_n}\} - c| \Leftrightarrow |b - a| \le 0$, de unde $b = a$, contradicţie.

Problema 4. Fie $s = \sup A$, $0 \le s \le \lambda$. Presupunem prin absurd că $s < \lambda$. Rezultă uşor că $|f(s) - f(0)| \le \varepsilon s$. Fie $n_0 \in \mathbf{N}$ astfel incât $s + \frac{1}{n_0} < \lambda$ şi $\left| f\left(s + \frac{1}{n_0}\right) - f(s) \right| \le \frac{\varepsilon}{n_0}$. Atunci avem:

$$\left|f\left(s+\frac{1}{n_0}\right)-f(0)\right|\le\left|f\left(s+\frac{1}{n_0}\right)-f(s)\right|+\left|f(s)-f(0)\right|\le\frac{\varepsilon}{n_0}+\varepsilon s=\varepsilon\left(s+\frac{1}{n_0}\right),$$

deci $s+\dfrac{1}{n_0}\in A$, contradicţie. Aşadar, $s=\lambda$.

b) Am demonstrat că $\lambda=\sup A$, deci $|f(\lambda)-f(0)|\le\varepsilon\lambda\le\varepsilon$. Am obţinut că $|f(\lambda)-f(0)|\le\varepsilon,\ \forall\,\varepsilon>0,\ \lambda\in(0,1)$, deci f este constantă.

Clasa a XII-a

Problema 1. a) $(x+\alpha)^5=x^5,\ x\ne 0\Leftrightarrow\left(\dfrac{x+\alpha}{x}\right)^5=1$. Rezultă că $\dfrac{x+\alpha}{x}\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$ şi apoi $x\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$.

b) Fie $x_1<\ldots<x_n$ rădăcinile lui P şi $y_k\in(x_k,x_{k+1})$ rădăcinile derivatei. Fie

$$\beta=\min\{\,y_k-x_k,x_{k+1}-y_k\,|\,0\le k\le n-1\,\}.$$

Pe fiecare interval $[x_k,x_{k+1}]$ şi pentru orice $0<\alpha<\beta$, definim $g(x)=P(x+\alpha)-P(x)$. Cum y_k este unicul punct de extrem pentru P pe intervalul $[x_k,x_{k+1}]$, presupunând, de exemplu, că este punct de maxim, avem: $g(x_k)=P(x_k+\alpha)-P(x_k)>0$, $g(y_k)=P(y_k+\alpha)-P(y_k)<0$, deci există $z_k\in(x_k,x_{k+1})$ cu $g(z_k)=0$. Se poate alege orice $\alpha\in(0,\beta)\cap\mathbf{Q}$.

Problema 2.
Fie $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ şi $a\in A$. Cum $\{a,a^2,\ldots,a^{n+1}\}\subset A$, există $i<j$ astfel încât $a^i=a^{i+j}$. De aici, $a^k=a^{k+jl},\forall\,k\ge i$ şi $l\in\mathbf{N}$. Aplicăm această observaţie pentru fiecare element al inelului A:

$\exists i_1,j_1$ astfel încât $a_1^k=a_1^{k+j_1l},\ \forall\,k\ge i_1,\ l\in\mathbf{N}$

....

$\exists i_n,j_n$ astfel încât $a_n^k=a_n^{k+j_nl},\ \forall\,k\ge i_n,\ l\in\mathbf{N}$.

Alegem acum $p\ge\max\{i_1,\ldots,i_n\}$ şi $q=cmmmc\{j_1,\ldots,j_n\}$ şi rezultă că $a^p=a^{p+q},\forall\,a\in A$.

Problema 3.
Avem $\displaystyle\int_0^1 f(\sin(x+\alpha))dx=\int_\alpha^{\alpha+1}f(\sin x)dx=F(\alpha+1)-F(\alpha)$, unde F este o primitivă a funcţiei $f\circ\sin$. Exista $k\in\mathbf{R}$ astfel încât $F(x)=l(x)+\dfrac{k}{2\pi}x$ şi l este o funcţie de perioadă 2π. Cum F are perioada 1, este marginită şi va rezulta $k=0$. Astfel, F este continuă şi are perioadele 1, 2π incomensurabile, deci F este constantă. În concluzie, f este identic nulă.

b) Avem $F(n)=F(0)$ şi F are perioada 2π. Fie $x_0\in\mathbf{R}$ şi $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ o vecinătate a lui x_0. Fie $m,n\in\mathbf{Z}$ astfel încât $m+2n\pi\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$. Avem $F(m+2n\pi)=F(m)=F(0)$, deci există $(x_n)_n\to x_0$ cu $F(x_n)=F(0)$. Deoarece F este continuă, rezultă că este constantă şi astfel f este identic nulă.

Problema 4.

a) Avem $a_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{p-1<x_k\le p}(x_{k+1}-x_k)f(x_k)\right)=\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}s_p$.

Cu Cesaro-Stolz avem: $\lim a_n=\lim s_n$. Acum,

$$s_n=\sum_{n-1<x_k\le n}(x_{k+1}-x_k)f(x_k)=\sum_{0<x_k-(n-1)\le 1}(y_{k+1}-y_k)f(y_k),$$

cu $y_k=x_k-(n-1)$, reprezintă suma Riemann asociată funcţiei f şi diviziunii $(y_k)_{r(n-1)<k\le r(n)}$ a intervalului $[0,1]$, a cărei normă tinde la zero, pentru $n\to\infty$. Prin urmare, $\lim s_n=\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

b) Pentru $x_n = \ln n$, rezultă că

$$z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[e^n]} \ln\frac{k+1}{k} f(\ln k) \to I, \quad I = \int_0^1 f(x)dx. \text{ Avem și } \lim_{n\to\infty} s_{[\ln n]} = I,$$

deci

$$\frac{1}{[\ln n]}\sum_{k=1}^{[e^{[\ln n]}]} \ln\frac{k+1}{k} f(\ln k) \to I \Rightarrow \frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{[e^{[\ln n]}]} \ln\frac{k+1}{k} f(\ln k) \to I.$$

Apoi

$$\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k+1}{k} f(\ln k) = \frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{[e^{[\ln n]}]} \ln\frac{k+1}{k} f(\ln k) + \frac{1}{\ln n}\sum_{k=[e^{[\ln n]}]+1}^{n} \ln\frac{k+1}{k} f(\ln k)$$

și arătăm că $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=[e^{[\ln n]}]+1}^{n} \ln\frac{k+1}{k} f(\ln k) = 0$. Cu $M = \sup|f(x)|$, avem:

$$\left|\sum_{k=[e^{[\ln n]}]+1}^{n} \ln\frac{k+1}{k} f(\ln k)\right| \le M \cdot \sum_{k=[e^{[\ln n]}]+1}^{n} \ln\frac{k+1}{k} = M \ln\frac{n}{[e^{[\ln n]}]+1} \to 0,$$

pentru $n \to \infty$.
În sfârșit,

$$\left|\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k+1}{k}\right) f(\ln k)\right| \le M \cdot \frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln\frac{k+1}{k}\right) = M \cdot \frac{1+\ldots+\frac{1}{n} - \ln(n+1)}{\ln n} \to 0,$$

deci concluzia.